Notion de fonction.

Exercice 1. Une fonction définie par une formule.
On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = -x^2 + 3x - 2$.

a) Calculer les images de 2, 0 et – 3 par la fonction f. **b)** Calculer $f\left(-\frac{1}{3}\right)$, $f(\sqrt{2})$ et $f(\sqrt{2}+1)$.

c) Déterminer le (ou les) nombre(s) dont l'image par f est – 2 (On dit le ou les antécédents de – 2 par f).

Exercice 2. Une autre fonction définie par une formule.
On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{5x-3}{x-6}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.
(C'est l'ensemble des x pour lequel le calcul de $g(x)$ est possible).

b) Calculer les images de -2 et $\frac{1}{3}$. **c)** Déterminer le(s) antécédent(s) de 3 et 5 par la fonction g.

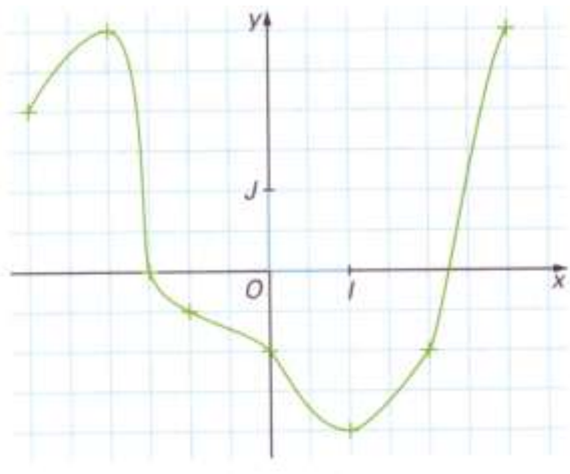
Exercice 3*. Dans chaque cas, préciser l'ensemble D des valeurs de x pour lesquelles le calcul de $f(x)$ est possible. Cet ensemble est appelé l'ensemble de définition de f.

a) $f(x) = 2x^2 + 1$ **b)** $f(x) = \frac{1}{2x} + 3x$ **c)** $f(x) = \frac{1}{x-1}$

d) $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$ **e)** $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

Courbes représentatives.

Exercice 4. Dans un repère (O, I, J),
on considère la courbe représentative d'une fonction :
1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Recopier et compléter le tableau :



x	– 1	0	1	2	3
image de x					

3. Déterminer les antécédents éventuel(s) de : – 2 ; – 1 ; 0 ; 3.

Exercice 5.
L'égalité $f(3) = -5$ se traduit par un vocabulaire différent pour la fonction f et pour la courbe C_f.
Fonction • l'image de 3 par la fonction f est – 5.
• 3 est un antécédent de – 5 par f.
Graphique • le point d'abscisse 3 de la courbe C_f a pour ordonnée – 5.
• 3 est l'abscisse d'un point de la courbe C_f d'ordonnée – 5.
Comme indiqué ci-dessus, traduire les égalités : $f(-2) = 0$ et $f(0) = 3$.

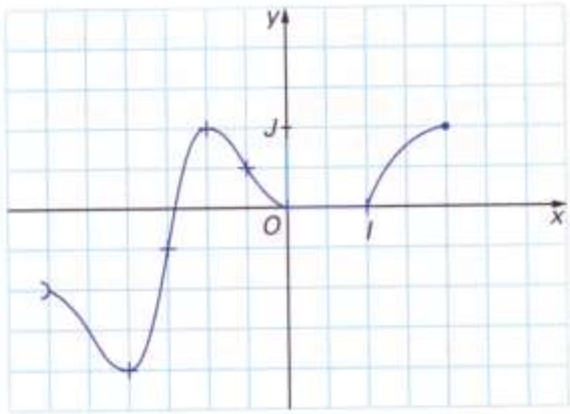
Exercice 6. Traduire les phrases suivantes à l'aide d'égalités :
a. Par la fonction g, – 5 est l'image de 4.
b. 2 a pour image 0 par la fonction f.
c. Un antécédent de – 3 par h est 5.
d. Les images par f de – 3 et 5 sont nulles.

Exercice 7. Écrire symboliquement (à l'aide des symboles mathématiques).
Conseil : dessiner rapidement la courbe d'une fonction qui vérifie les conditions données.

a. La courbe de la fonction f passe par le point A (3 ; 1).
b. L'ordonnée du point d'abscisse 2 de la courbe C_f vaut 1.
c. La représentation graphique de la fonction g coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3.
d. La courbe C_h, représentant la fonction h, passe par l'origine du repère.
e. La courbe C_k, représentant la fonction k, coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses – 5 et 4.

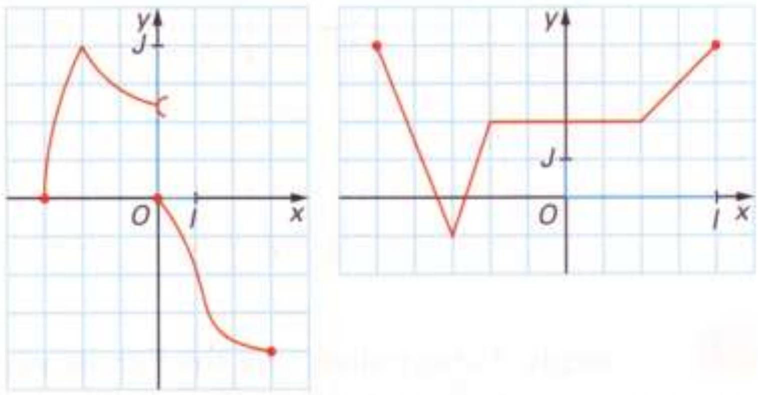
Fonctions croissantes, décroissantes.

Exercice 8. On considère la représentation graphique d'une fonction :

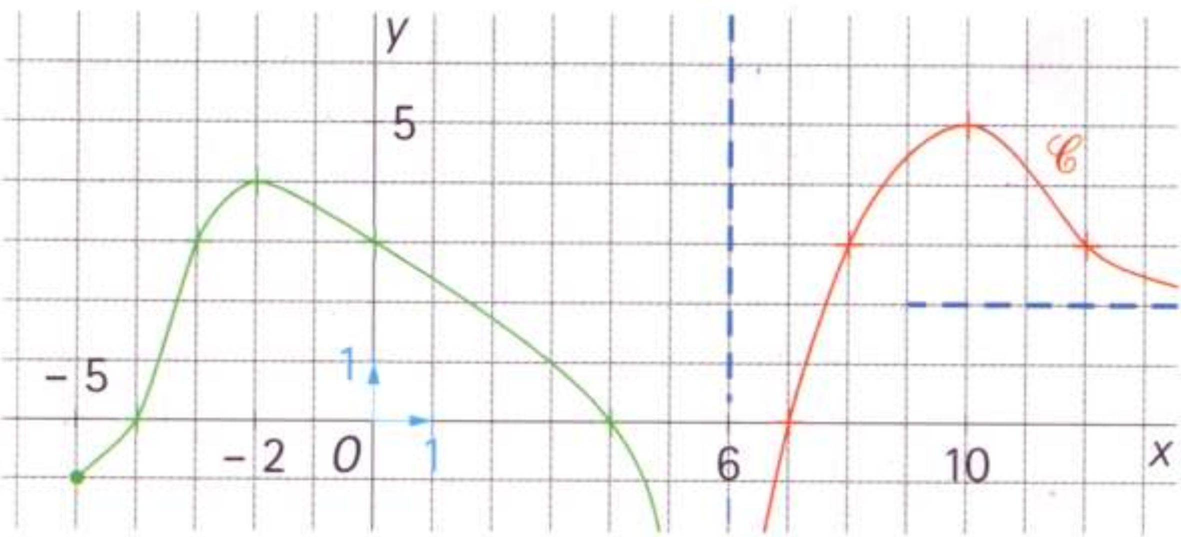


1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Déterminer f (2), f (0) et f (– 1).
3. Déterminer les antécédents éventuels de 1.
4. Combien – 1 a-t-il d'antécédents ?
5. Donner le sens de variation de f (faire des phrases).
6. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

Exercice 9. On donne les représentations graphiques de trois fonctions f, g et h. Dans chacun des cas, donner leur ensemble de définition D, préciser les extremums et en quels points ils sont atteints.



Exercice 10. En utilisant les conventions graphiques, énoncer les variations de la fonction f représentée ci-dessous (la courbe est en deux parties). Préciser son ensemble de définition et ses extremums s'ils existent. Dresser le tableau de variations.



Exercice 11. On définit une fonction f par son tableau des variations :

x	-6		-1		4		6
$f(x)$	10	↘	-1	↗	0	↘	-4

1. Quel est l'ensemble de définition D de f ?
2. Quelles sont les images de -1 ? de 4 ? de 6 ?
3. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de l'image de 0.
4. Donner un antécédent de -1.
-1 a-t-il d'autres antécédents dans $[-6\ ;\ 6]$?
5. Combien 0 a-t-il d'antécédents ?
6. Combien 2 a-t-il d'antécédents ?

Exercice 12. On donne le tableau des variations d'une fonction :

x	-5		-2		0		3
$f(x)$	-1	↗	4	↘	0	↗	3

1. A l'aide du tableau des variations, indiquer si les égalités ou inégalités proposées sont vraies, fausses, ou si le tableau ne permet pas de conclure, <u>en justifiant</u>.
a. $f(-1) = 0$ **b.** $f(-4) > f(-2)$ **c.** $f(1) > f(2)$
d. $f(1) = -2$ **e.** $f(-3) > 1$ **f.** $f(-5) < f(2)$.
2. Donner l'allure de deux courbes représentatives d'une fonction f dont le tableau des variations ci-dessus peut convenir.

Exercice 13*. Voici le tableau des variations d'une fonction f :

x	-5		-2		$\frac{1}{2}$		4
$f(x)$	1	↘	0	↗	3	↘	0

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
Préciser le sens de variation de cette fonction.
2. Indiquer le maximum, le minimum de cette fonction, ainsi que les valeurs où ils sont atteints.
3. Recopier et compléter des écritures ci-dessous en utilisant les symboles > ou < et <u>en justifiant</u> :
$f(-5) \ldots f(-4)$ $f(-2) \ldots f(-1)$ $f(2) \ldots f(4)$.

Exercice 14*. On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = -x^2 + 6x - 2$.
Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$.
1. Montrer que $f(b) - f(a) = (a - b)(a + b - 6)$.
2. Montrer que f est décroissante sur $[3\ ;+\infty[$ avec la question précédente en considérant que $3 \leq a \leq b$.
3. Montrer que f est croissante sur $]-\infty\ ;3]$ avec la question 1 en considérant $a \leq b \leq 3$.

Utilisation de la calculatrice.

Exercice 15. On considère la fonction f définie sur [0 ; 12] par $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + x + 6$.

Calculer les images des entiers de cet intervalle (faire un tableau de valeurs avec la calculatrice).
Construire la courbe C_f représentant cette fonction dans un repère orthogonal, sachant que le maximum de f est atteint en $x = 4$.

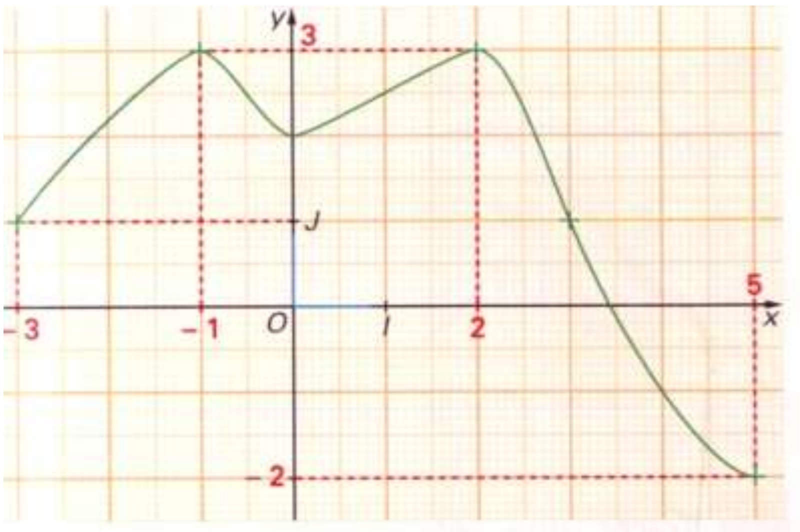
Exercice 16. Dans un repère orthonormé d'unité 1 cm, tracer point par point les courbes représentatives des fonctions f et g définies par : $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ sur $[-2 ; 6]$.

$g(x) = -\frac{1}{4}x^3 - 3x + 1$ sur $[-4{,}5 ; 4{,}5]$.

On admet que ces fonctions changent de variation en des valeurs entières.

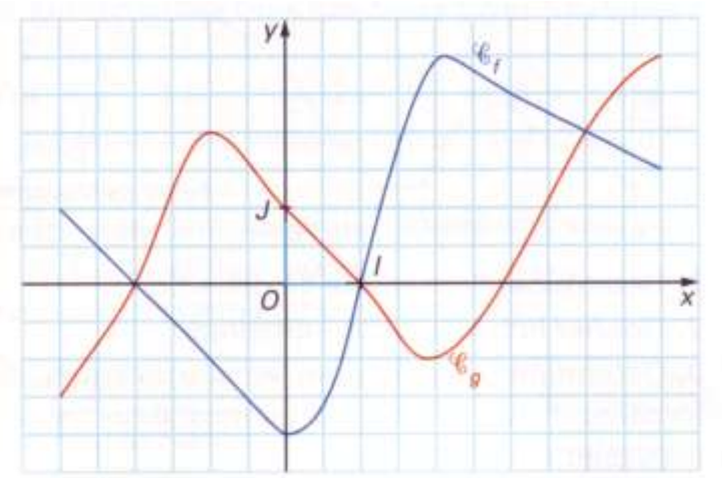
Résoudre une équation ou une inéquation graphiquement.

Exercice 17. On donne la représentation graphique C de la fonction f suivante :



1. Donner l'ensemble de définition D de la fonction f.
2. Déterminer $f(0)$ et $f(4)$.
3. Résoudre graphiquement, en indiquant la méthode : $f(x) = -1$ et $f(x) = 1$.
4. Résoudre graphiquement, en indiquant la méthode : $f(x) \geq 2$ et $f(x) < 0$.
5. Donner le tableau de signe de la fonction f.
6. Donner le tableau de variation de la fonction f.
7. Déterminer le maximum de la fonction f sur D, ainsi que la ou les valeurs où il est atteint.
8. Déterminer le minimum de la fonction f sur D, ainsi que la ou les valeurs où il est atteint.

Exercice 18. Soit C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur [– 3 ; 5].



1. Résoudre graphiquement, en indiquant la méthode, l'équation $f(x) = g(x)$.
2. Résoudre graphiquement, en indiquant la méthode, l'inéquation $f(x) > g(x)$.
3. Faire les tableaux de signes des fonctions f et g.
4. Recopier et compléter les inégalités suivantes :

- Si $-3 \leq x \leq 0$, alors … $\leq f(x) \leq$ …
- Si $-3 \leq x \leq 0$, alors … $\leq g(x) \leq$ …
- Si $1 \leq x \leq 4$, alors … $\leq f(x) \leq$ …
- Si $1 \leq x \leq 4$, alors … $\leq g(x) \leq$ …
- Si $-2 \leq f(x) \leq 0$, alors $x \in$ …
- Si $f(x) \leq g(x) < 2$, alors $x \in$ …

Notion de fonction.

Exercice 1. Une fonction définie par une formule.

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = -x^2 + 3x - 2$.

a) Calculons l'image de 2 par f.

$f(2) = -2^2 + 3 \times 2 - 2 = 4 + 6 - 2 = 8$.

Calculons l'image de 0 par f.

$f(0) = -0^2 + 3 \times 0 - 2 = 0 + 0 - 2 = -2$.

Calculons l'image de -3 par f.

$f(-3) = -(-3)^2 + 3 \times (-3) - 2 = -9 - 9 - 2 = -20$.

Calculons $f\left(-\frac{1}{3}\right)$, $f\left(\sqrt{2}\right)$ et $f\left(\sqrt{2}+1\right)$.

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 3\times\left(-\frac{1}{3}\right) - 2 = -\frac{1}{9} - 1 - 2 = -\frac{1}{9} - 3 = -\frac{1}{9} - \frac{27}{9} = -\frac{28}{9}.$$

$$f\left(\sqrt{2}\right) = -\left(\sqrt{2}\right)^2 + 3\times\sqrt{2} - 2 = -2 + 3\sqrt{2} - 2 = -4 + 3\sqrt{2}.$$

$$f\left(\sqrt{2}+1\right) = -\left(\sqrt{2}+1\right)^2 + 3\left(\sqrt{2}+1\right) - 2 = -\left(2 + 2\sqrt{2} + 1\right) + 3\left(\sqrt{2}+1\right) - 2 = -3 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 3 - 2 = \sqrt{2} - 2.$$

c) Déterminons le (ou les) nombre(s) dont l'image par f est -2 (On dit le ou les antécédents de -2 par f).

On résout l'équation $f(x) = -2$, soit $-x^2 + 3x - 2 = -2$, d'où $-x^2 + 3x = 0$, puis $x(-x + 3) = 0$.

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, donc $x = 0$ ou $-x + 3 = 0$.

Ainsi -2 a deux antécédents par f qui sont 0 et 3.

Vérification : calculer $f(0)$ (déjà fait) et $f(3)$ pour voir que cela fait -2.

Exercice 2. Une autre fonction définie par une formule.

On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{5x - 3}{x - 6}$.

a) Déterminons l'ensemble de définition de la fonction g.

Le calcul de $g(x)$ est possible est possible lorsque $x - 6 \neq 0$, soit $x \neq 6$.

Note : 6 est appelée une valeur interdite de g.

Donc l'ensemble de définition de g est $D_g = \mathbf{R} - \{6\} = \left]-\infty\,;6\right[\cup \left]6\,;+\infty\right[$.

b) Calculons les images de -2 et $\frac{1}{3}$.

$$g(-2) = \frac{5\times(-2) - 3}{-2 - 6} = \frac{-10 - 3}{-8} = \frac{-13}{-8} = \frac{13}{8}.$$

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5\times\frac{1}{3} - 3}{\frac{1}{3} - 6} = \frac{\frac{5}{3} - 3}{\frac{1}{3} - 6} = \frac{\frac{5}{3} - \frac{9}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{18}{3}} = \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{17}{3}} = -\frac{4}{3}\times\left(-\frac{3}{17}\right) = \frac{4}{17}.$$

c) Déterminer le(s) antécédent(s) de 3 par la fonction g.

On doit résoudre l'équation $g(x) = 3$ soit $\frac{5x - 3}{x - 6} = 3$.

Les produits en croix sont égaux, donc $3(x - 6) = 5x - 3$ puis $3x - 18 = 5x - 3$ d'où $-18 + 3 = 5x - 3x$.

On a donc $2x = -15$ et $x = -\frac{15}{2}$. Donc 3 a pour antécédent $-\frac{15}{2}$ par g.

Déterminer le(s) antécédent(s) de 5 par la fonction g.

On doit résoudre l'équation $g(x) = 5$ soit $\frac{5x - 3}{x - 6} = 5$.

Les produits en croix sont égaux, donc $5(x - 6) = 5x - 6$ puis $5x - 30 = 5x - 6$ d'où $-30 = -6$.

Ceci est impossible donc 5 n'a pas d'antécédent par g.

Exercice 3*. Dans chaque cas, précisons l'ensemble D des valeurs de x pour lesquelles le calcul de $f(x)$ est possible. Cet ensemble est appelé l'ensemble de définition de f.

a) $f(x) = 2x^2 + 1$. Le calcul de $f(x)$ est toujours possible ici, donc D = **R**.

b) $f(x) = \dfrac{1}{2x} + 3x$. Le calcul de $f(x)$ est possible lorsque $2x \neq 0$ soit $x \neq 0$

Note : 0 est appelée une valeur interdite de f.

Donc D = **R** – {0} = **R** = $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.Le calcul de $f(x)$ est possible lorsque $x - 1 \neq 0$ soit $x \neq 1$.

Note : 1 est appelée une valeur interdite de f.

Donc D = **R** – {1} = **R** = $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

d) $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$. Le calcul de $f(x)$ est possible lorsque celui de $\sqrt{x}$ l'est. Donc x doit être positif (ou nul).

Donc D = [0 ; + ∞ [.

e) $f(x) = \dfrac{2}{x(x+1)}$. Le calcul de $f(x)$ est possible lorsque $x(x+1) \neq 0$.

L'équation $x(x+1) = 0$ a deux solutions $x = 0$ ou $x = -1$.

Donc 0 et – 1 sont les valeurs interdites de f.

Ainsi D = **R** – {0 ; – 1} = $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.

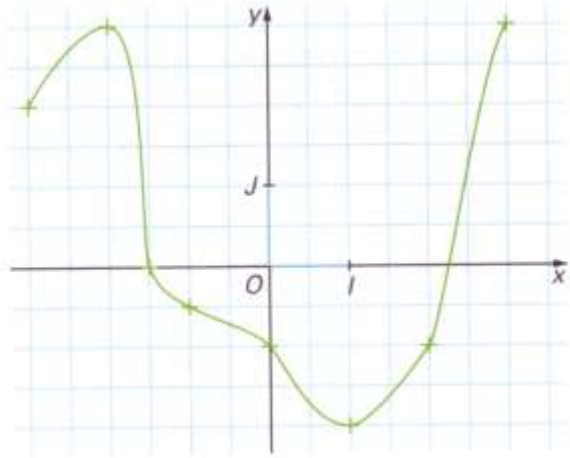
Courbe représentative.

Exercice 4. Dans un repère (O, I, J),

on considère la courbe représentative d'une fonction :

1. L'ensemble de définition de f est D = [– 3 ; 3].

2. Complétons le tableau :



x	– 1	0	1	2	3
image de x	– 0,5	– 1	– 2	– 1	3

3. Déterminons les antécédents éventuel(s).

– 2 a un seul antécédent : 1.

– 1 a deux antécédents : 0 et 2.

0 a deux antécédents : – 1,5 et 2,3.

3 a deux antécédents : – 2 et 3.

Exercice 5. L'égalité $f(-2) = 0$ se traduit par un vocabulaire différent pour la fonction f et pour la courbe C_f.

Fonction
- l'image de – 2 par la fonction f est 0.
- – 2 est un antécédent de 0 par f.

Graphique
- le point d'abscisse – 2 de la courbe C_f a pour ordonnée 0.
- – 2 est l'abscisse d'un point de la courbe C_f d'ordonnée 0.

L'égalité $f(0) = 3$ se traduit par un vocabulaire différent pour la fonction f et pour la courbe C_f.

Fonction
- l'image de 0 par la fonction f est 3.
- 0 est un antécédent de 3 par f.

Graphique
- le point d'abscisse 0 de la courbe C_f a pour ordonnée 3.
- 0 est l'abscisse d'un point de la courbe C_f d'ordonnée 3.

Exercice 6. Traduisons les phrases suivantes à l'aide d'égalités :

a. Par la fonction g, – 5 est l'image de 4 s'écrit aussi $g(4) = -5$.

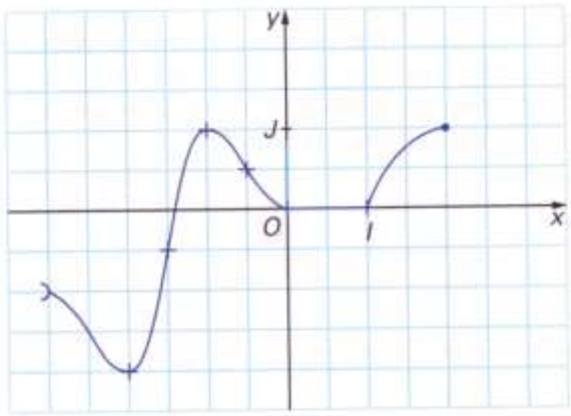
b. 2 a pour image 0 par la fonction f s'écrit aussi $f(2) = 0$.

c. Un antécédent de – 3 par h est 5 s'écrit aussi $h(5) = -3$.

d. Les images par f de – 3 et 5 sont nulles s'écrit aussi $f(-3) = f(5) = 0$.

Exercice 7. Écrire symboliquement (à l'aide des symboles mathématiques).
Conseil : dessiner rapidement la courbe d'une fonction qui vérifie les conditions données.
a. La courbe de la fonction f passe par le point A (3 ; 1) s'écrit $f(3) = 1$.
b. L'ordonnée du point d'abscisse 2 de la courbe C_f vaut 1 s'écrit aussi $f(2) = 1$.
c. La courbe de la fonction g coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3 s'écrit aussi $g(0) = 3$.
d. La courbe C_h, représentant la fonction h, passe par l'origine du repère s'écrit aussi $h(0) = 0$.
e. La courbe C_k, représentant la fonction k, coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses – 5 et 4 s'écrit aussi $k(-5) = k(4) = 0$.

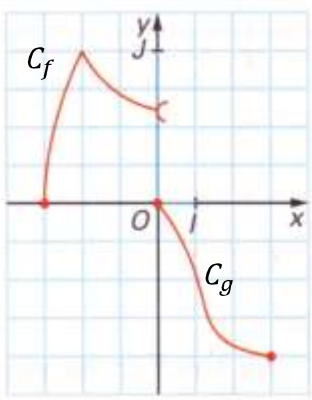
Exercice 8. On considère la représentation graphique d'une fonction :

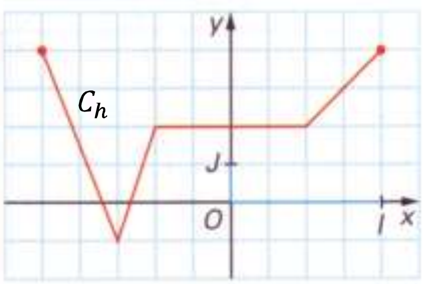


1. L'ensemble de définition de la fonction f est $]-3 ; 2]$.
2. Déterminons : $f(2) = 1$, , $f(0) = 0$ et $f(-1) = 1$.
3. Les antécédents de 1 sont – 1 et 2.
4. 1 a un antécédent qui vaut environ – 1,6.
5. Donnons le sens de variation de f :
f est décroissante sur $]-3 ; -2]$.
f est croissante sur $[-2 ; -1]$.
f est décroissante sur $[-1 ; 0]$.
f est constante sur $[0 ; 1]$.
f est croissante sur $[1 ; 2]$.
6. Dressons le tableau des variations de la fonction f.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	-2	1	0	0	1

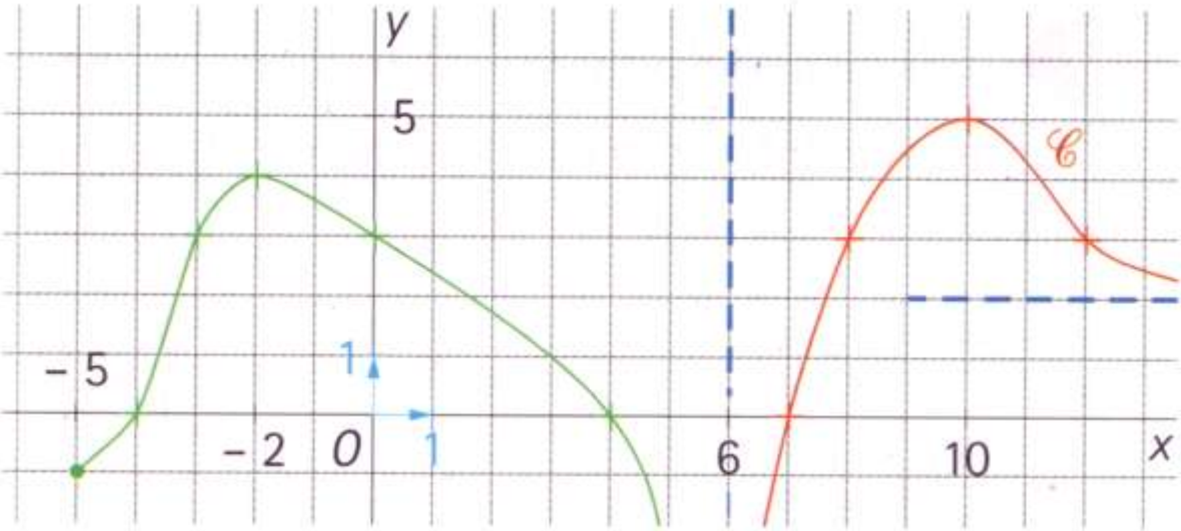
Exercice 9. On donne les représentations graphiques de trois fonctions f, g et h.
f est définie sur $[-3 ; 0[$, g est définie sur $[0 ; 3]$ et h est définie sur $[-1,25 ; 1]$.
Le minimum de f est 0, il est atteint pour $x = -3$, le maximum de f est 1, il est atteint pour $x = -1$.
Le minimum de g est – 1, il est atteint pour $x = 3$, le maximum de g est 0, il est atteint pour $x = 0$.
Le minimum de h est – 1, il est atteint pour $x = -0,75$.
Le maximum de h est 4, il est atteint pour $x = -1,25$ et $x = 1$.





Exercice 10. En utilisant les conventions graphiques, on voit que :
f est croissante sur [– 5 ; – 2] puis *f* est décroissante sur [– 2 ; 6 [.
f est croissante sur] 6 ; 10] puis *f* est décroissante sur [10 ; + ∞ [.
L'ensemble de définition de *f* est [– 5 ; 6 [∪] 6 ; + ∞ [.
Remarquons que 6 n'a pas d'image (il n'est pas dans l'ensemble de définition), c'est ce qu'on appelle une valeur interdite. Dans le tableau de variations, une double barre est mise en dessous de la valeur interdite :

x	-5		-2		6		10		$+\infty$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$	5	$\searrow$	2



Fonctions croissantes, décroissantes.

Exercice 11. On définit une fonction *f* par son tableau des variations :

x	-6		-1		4		6
$f(x)$	10	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4

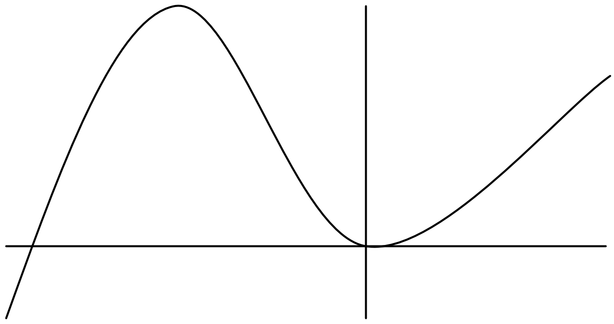
1. L'ensemble de définition de *f* est D = [– 6 ; 6].
2. L'image de – 1 est – 1, l'image de 4 est 0, l'image de 6 est – 4.
3. L'image de 0 est comprise entre – 1 et 0. Soit $-1 < f(0) < 0$.
4. Un antécédent de – 1 est – 1. – 1 a un autre antécédent qui est compris entre 4 et 6.
5. 0 a deux antécédents : 4 et un l'autre est compris entre – 6 et – 1.
6. 2 a un antécédent, compris entre – 6 et – 1.

Exercice 12. On donne le tableau des variations d'une fonction :

x	-5		-2		0		3
$f(x)$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	3

1. A l'aide du tableau des variations, indiquons si les égalités ou inégalités proposées sont vraies, fausses, ou si le tableau ne permet pas de conclure.

a. $f(-1) = 0$. Faux, d'après le tableau on a $0 < f(-1) < 4$.
b. $f(-4) > f(-2)$. Faux, la fonction f est croissante sur $[-5 ; -2]$, donc $-4 < -2$ entraîne $f(-4) < f(-2)$.
c. $f(1) > f(2)$. Faux, la fonction f est décroissante sur $[0 ; 3]$, donc $1 < 2$ entraîne $f(1) < f(2)$.
d. $f(1) = -2$. Le tableau ne permet pas de conclure. $f(1)$ est compris entre 0 et 3 (strictement).
e. $f(-3) > 1$. Le tableau ne permet pas de conclure. $f(-3)$ est compris entre -1 et 4 (strictement).
f. $f(-5) < f(2)$. Vrai car $f(-5) = -1$ et $f(2)$ est compris entre 0 et 3.
2. Donnons une courbe représentative d'une fonction f dont le tableau des variations ci-dessus peut convenir.



Exercice 13*. Voici le tableau des variations d'une fonction f :

x	-5		-2		$\frac{1}{2}$		4
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

1. L'ensemble de définition de la fonction f est $[-5 ; 4]$.
f est décroissante sur $[-5 ; -2]$, f est croissante sur $[-2 ; 0{,}5]$, f est décroissante sur $[0{,}5 ; 4]$.
2. Le maximum de f est 3, il est atteint pour $x = 0{,}5$. Le minimum de f est 0, il est atteint pour $x = -2$ et $x = 4$.
3. Comme $-5 < -4$ et que f est décroissante sur $[-5 ; -2]$, alors $f(-5) > f(-4)$.
Comme $-2 < -1$ et que f est croissante sur $[-2 ; 0{,}5]$, alors $f(-2) < f(-1)$.
Comme $2 < 4$ et que f est décroissante sur $[0{,}5 ; 4]$, alors $f(2) > f(4)$.

Exercice 14*. On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = -x^2 + 6x - 2$.
Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$.

1. On calcule $f(b) - f(a) = -b^2 + 6b - 2 - (-a^2 + 6a - 2) = -b^2 + 6b - 2 + a^2 - 6a + 2$

$$= a^2 - b^2 - 6a + 6b$$
$$= (a - b)(a + b) - 6(a - b)$$
$$= (a - b)[(a + b) - 6]$$
$$= (a - b)(a + b - 6).$$

2. Prenons a et b tels que $3 \leq a \leq b$. Alors $a - b \leq 0$ (car $a \leq b$) et $a + b - 6 \geq 0$ (car $a \geq 3$ et $b \geq 3$). Donc $f(b) - f(a) \leq 0$, soit $f(b) \leq f(a)$. Comme $3 \leq a \leq b$ entraîne $f(a) \geq f(b)$, cela prouve que f est décroissante sur $[3 ; +\infty[$.

3. Prenons a et b tels que $a \leq b \leq 3$. Alors $a - b \leq 0$ (car $a \leq b$) et $a + b - 6 \leq 0$ (car $a \leq 3$ et $b \leq 3$). Donc $f(b) - f(a) \geq 0$, soit $f(b) \geq f(a)$. Comme $a \leq b \leq 3$ entraîne $f(a) \leq f(b)$, cela prouve que f est croissante sur $]-\infty ; 3]$.

Exercice 15. On considère la fonction f définie sur $[0 ; 12]$ par $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + x + 6$.

On fait un tableau de valeurs avec la calculatrice. On arrondit au dixième pour $f(x)$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	6	6,9	7,5	7,9	8	7,9	7,5	6,9	6	4,9	3,5	1,9	0