

Devoir surveillé de mathématiques

Exercice 1 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions

$$\text{a) } f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 16} \quad \text{b) } g : x \mapsto \frac{\sqrt{3x - 6}}{(x + 3)(2x - 5)} \quad \text{c) } h : x \mapsto \sqrt{(x - 3)(5 - x)}$$

Exercice 2 Résoudre les inéquations :

$$(I_1) : (x + 3)(2x - 5) \leq 0 \quad (I_2) : \frac{2}{2x - 3} \geq 1$$

Exercice 3 On considère les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x + 1}$.

Le but de l'exercice est de comparer les positions des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g représentatives des fonctions f et g .

- 1) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g .
- 2) Montrer que, pour tout nombre x réel, $x^3 + x^2 - 2 = (x - 1)(x^2 + 2x + 2)$.
- 3) Montrer que pour tout nombre x réel, $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$.
En déduire le signe de l'expression $x^2 + 2x + 2$.
- 4) A l'aide de ce qui précède, déterminer la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Exercice 4 Monsieur Dupré, PDG d'une société fabriquant du mobilier urbain, s'intéresse au bénéfice réalisé par sa société.

Il fabrique et vend, par semaine, x lots de mobilier.

Le coût unitaire de production, en euros, $f(x)$ (coût de production pour un lot de mobilier) s'exprime en fonction du nombre de lots x par l'expression : $f(x) = x + 72$.

A ce coût unitaire s'ajoute des frais de fonctionnement de l'usine de production s'élevant à 3952 euros par semaine, quelle que soit la quantité de lots produite.

- 1) Chaque lot étant vendu 200 euros, montrer que le bénéfice réalisé pour x lots produits et vendus est :

$$B(x) = -x^2 + 128x - 3952 = (x - 52)(76 - x)$$

Déterminer alors le nombre de lots que doit produire et fabriquer la société pour être rentable (pour avoir un bénéfice positif ...).

- 2) Montrer que $B(x) = -(x - 64)^2 + 144$.

Étudier alors les variations de B sur $[0; 64]$ et sur $[64; +\infty[$. Dresser le tableau de variations de B .

Quel est le bénéfice maximal que peut espérer Monsieur Dupré ? Pour combien de lots fabriqués et vendus ?