FONCTIONS II

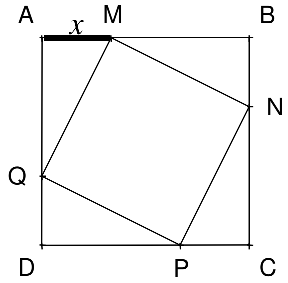
I) Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 4$

1) Etude de f :
   a) Montrer que la fonction f admet un extremum en $x = 3$. Préciser sa valeur.
   b) Etudier les variations de f sur $]-\infty ; 3]$ et sur $[3 ; +\infty[$. On dressera le tableau des variations de f
   c) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$
2) Résolution d'équations :
   a) Résoudre l'équation $f(x) = -1$ d'abord par le calcul puis dans un deuxième temps graphiquement
   b) Résoudre l'inéquation $f(x) > -2x$ d'abord graphiquement puis dans un deuxième temps par le calcul
   (Pour les deux résolutions graphiques des questions a) et b), on tracera bien sûr les droites nécessaires dans le repère ci-dessus)

II) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto 2x^2 - 12x + 36$

A) Première partie :
1) Montrer que f admet un minimum en $x = 3$ sur $\mathbb{R}$
2) Etudier les variations de f sur $]-\infty ; 3]$ puis sur $[3 ; +\infty[$. Dresser son tableau de variations.
3) Tracer la représentation graphique de f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unités : 1cm ou 1grand carreau sur (Ox) et 0,5 cm ou 0,5 grand carreau sur (Oy))
4) Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) \geqslant 30$

B) Deuxième partie : On considère un carré ABCD tel que AB = 6
et un carré MNPQ, inscrit dans ABCD, et tel que AM = BN = CP = DQ = x



1) A quel intervalle x appartient-il ?
2) a) Calculer MN en fonction de x
   b) En déduire A(x), l'aire de MNPQ.
   c) Pour quelles valeurs de x, l'aire A(x) est-elle minimale ?
   Faire la figure correspondant.
3) Utilisez le graphique de la partie A) pour répondre aux questions suivantes :
   a) Quelles-sont les valeurs entre lesquelles varie A(x) ?
   b) Résoudre graphiquement A(x) = 20
   c) Résoudre graphiquement A(x) $\geqslant$ 30

III) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{3 - 2x}{x + 1}$ et Cf sa représentation graphique.

1) Etudier le sens de variation de f sur $]-\infty ; -1[$ puis sur $]-1 ; +\infty[$. Dresser le tableau de variations.
2) Donner un tableau de valeurs puis tracer Cf
3) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant \dfrac{3}{2}$
4) Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) > -\dfrac{1}{2}$

IV) On se propose de résoudre le système S ci-contre par deux méthodes différentes : $\begin{cases} -\dfrac{1}{x} + y = 2 \\ \dfrac{2}{x} + y = -1 \end{cases}$

1) 1ère méthode : Résoudre le système à l'aide d'une inconnue auxiliaire
2) 2ème méthode : Soient les fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$; $g(x) = -\dfrac{2}{x} - 1$
   a) Etudier les variations des fonctions f et g puis dresser leurs tableaux de variations.
   b) Tracer dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ leurs représentations graphiques Cf et Cg
   c) Retrouver graphiquement le résultat de la question 1). Justifier votre réponse.

V) Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$. On choisira 1 cm ou 1 grand carreau comme unité.

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2 - 3x$ et P sa courbe représentative
   a) Déterminer les variations de f sur $]-\infty ; 3/2]$ et $[3/2 ; +\infty[$. Faire un tableau de variations
   b) Tracer P
2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $x \mapsto \dfrac{3-x}{x+2}$ et H sa courbe représentative.
   a) Déterminer les variations de g sur $]-\infty ; -2[$ et $]-2 ; +\infty[$
   b) Tracer H ainsi que les droites d'équations $x = -2$ et $y = -1$
3) Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$
4) Résoudre par le calcul $f(x) < g(x)$

VI) 1) Etudier les variations sur $]-\infty ; 3/2]$ et $[3/2 ; +\infty[$ de la fonction f définie par $x \mapsto 3x - x^2$

2) Un triangle ABC rectangle en A est tel que : AB = 4 ; AC = 3 ;
   Soit M un point de [AC]. On pose AM = x et on construit le rectangle AMNP inscrit dans ABC.
   a) A quel intervalle appartient le réel x ?
   b) Montrer que $AP = 4 - 4/3\,x$
   c) Soit p la fonction représentant le périmètre du rectangle AMNP, déterminer $p(x)$ et donner le tableau des variations de p.
   d) Soit Q la fonction représentant l'aire du rectangle AMNP, déterminer Q(x) et en utilisant la question 1), donner le tableau des variations de Q.
   e) Quelles dimensions donner au rectangle AMNP pour qu'il soit le plus grand possible ?

VII) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto -\dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{1}{2}$

1) a) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = -\dfrac{1}{2}(x-1)^2 + 1$.
   En déduire que f admet un maximum en $x = 1$
   b) Etudier les variations de f sur $I =]-\infty ; 1]$, puis sur $J = [1 ; +\infty[$
   (conclure par un tableau de variations)
   c) Tracer Cf, la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$
   (<u>unité 2 cm ou 2 grands carreaux</u>)
2) Résoudre algébriquement $f(x) > x$ puis en déduire les points de la courbe Cf dont l'ordonnée est plus grande que l'abscisse.
3) On considère la droite D d'équation $y = 3/2$ et le point F(1 ; 1/2).
   Pour tout point M de la courbe Cf, on considère son projeté orthogonal H sur la droite D.
   a) Déterminer MF² et MH² en fonction de x. En déduire que M est un point de la médiatrice de [FH].
   b) Soit A le point d'abscisse 3 de la courbe Cf et K son projeté orthogonal sur D.
   Déterminer l'équation de la médiatrice Δ de [FK], puis la tracer.
   Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f(x) \leqslant -2x+5$.
   En déduire que la courbe Cf est située en dessous de la droite Δ, seul le point A étant en commun (la droite Δ est dite "tangente à Cf en A").