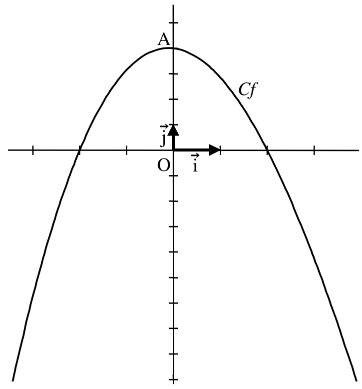
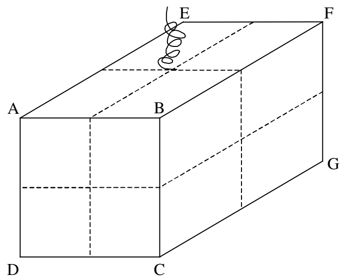
2^K DS de mathématiques 2h calculatrice autorisée 17XI08

I) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto \left(\dfrac{x}{20} - 1\right)(x-2)^2 + \dfrac{x}{5}(x-2) - 4x + 8$



1) Déterminer par le calcul les coordonnées du point A intersection de Cf avec l'axe des ordonnées.
2) En vous appuyant sur la courbe ci-contre, résoudre graphiquement l'inéquation : $(I_1) : f(x) \geqslant 0$
3) Résoudre (I_1) par le calcul.
   Comment expliquez-vous que l'on ne trouve pas le même résultat que dans la question 2 ?

II) Pour le stand "cadeaux" de la fête de charité, vous devez entourer un paquet avec une ficelle (voir figure ci-contre où la ficelle est en pointillé). Ce paquet est un parallélépipède rectangle dont la face ABCD est un carré de côté x et on appelle y la longueur AE. Vous disposez d'une seule ficelle de 110 cm de long mais, une fois enlevée la longueur nécessaire au nœud, il ne vous reste plus que 100 cm pour faire le tour du paquet. On considère la fonction f qui à x fait correspondre le volume du paquet. Le but de l'exercice est de déterminer pour quelle valeur de x ce volume est maximum.



1) En justifiant rapidement, montrer que l'on doit avoir : $8x + 4y = 100$
2) Déterminer Df, l'ensemble de définition de f
   puis déterminer $f(x)$ en fonction de x.
3) Tracer Cf, la représentation graphique de f et déduisez-en par lecture graphique la valeur de x pour laquelle le paquet est le plus volumineux possible.

III) Soit un segment [AB] de milieu I.
1) Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} = \vec{0}$
2) Déterminer l'ensemble des points N tels que $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NI} = \overrightarrow{AB}$
3) Déterminer l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{2PI}$

IV) ABCD est un quadrilatère quelconque.
On appelle I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA]
1) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$
2) Déterminer la nature de IJKL

V) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E_1) : $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$

BAREME PROBABLE : I) 6pts II) 6pts III) 3pts IV) 3pts V) 2pts

2^{IK} DS de mathématiques 1h30 calculatrice autorisée 21XI05

I) ABCD est un quadrilatère quelconque. A' est le milieu de [BC].
Le point E est défini par $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} - 2\,\overrightarrow{DA}$.
1) Exprimer $\overrightarrow{DE}$ en fonction de $\overrightarrow{AA'}$ et en déduire une façon simple de construire E.
2) Montrer que ADEA' est un trapèze.

II) E et F sont deux points distincts du plan *P*.
Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer sans justifier l'ensemble des points M du plan *P* qui vérifient la condition.
1) EM + MF = EF
2) $\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{EF}$
3) $EM^2 + MF^2 = EF^2$

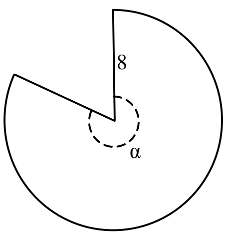
III) A, B et C sont trois points distincts non alignés.

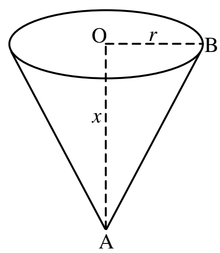
$\vec{u} = 2\,\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$

$\vec{v} = \frac{1}{2}(5\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{AC}) - \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

IV) On veut découper un cornet de cacahuètes en forme de cône dans un disque en carton de 8cm de rayon.





On appelle f la fonction qui à la hauteur x du cornet fait correspondre son volume.
1) Déterminer *Df*.
2) Exprimer r en fonction de x.
3) En déduire que pour tout x de *Df*, on a : $f(x) = \frac{\pi}{3}(-x^3 + 64\,x)$
4) Tracer *Cf* en choisissant 1cm sur le graphique pour 1 cm en abscisse et 25 cm^3 en ordonnée.
5) On décide que le cornet doit avoir un volume de 125 cm^3.
Résoudre graphiquement l'équation nécessaire puis conclure sachant que l'on souhaite également que le cornet soit suffisamment pointu pour bien tenir en main.
6) Exprimer α en fonction de x puis dessiner le patron du cornet souhaité sur votre copie.

Le volume d'un cône est donnée par la formule : $v = \frac{\text{aire base} \times \text{hauteur}}{3}$ (sympa le prof !)

BAREME PROBABLE : I) 4pts II) 3pts III) 4pts IV) 9pts

2^{DJ} Composition de Mathématiques 2h calculatrice autorisée 13 XI 01

I) On se place dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$
1) Soit $M(x\ ;\ y)$ un point d'ordonnée positive tel que OM = 5, et N le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.
a) Quelles sont les valeurs que x peut prendre ?
b) Exprimer y l'ordonnée de M en fonction de son abscisse x
2) On appelle $f(x)$ l'aire du triangle OMN
a) Montrer que si x est positif, $f(x) = \dfrac{x\sqrt{25-x^2}}{2}$.
Et si x est négatif ?
b) Représenter graphiquement *Cf*
3) Résoudre graphiquement :
a) $f(x) = 0$
b) $f(x) < 6$
c) $f(x) < 10$
4) Pour quelles valeurs de x l'aire de OMN est-elle maximum ?

II) Montrer que la somme des inverses des diviseurs du nombre 28 est un entier.

III) Soit un triangle ABC et K le milieu de [AB].
1) Construire les points D, E, F, H définis par :
$\overrightarrow{AD} + 3\,\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ $\overrightarrow{AE} + 3\,\overrightarrow{BE} = \vec{0}$ $3\,\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB} = 5\,\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{BH} + 2\,\overrightarrow{CH} = \vec{0}$
2) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{CK}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{AH}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
3) Démontrer que :
a) D, E et F sont alignés
b) (CK) et (DE) sont parallèles
c) E est le milieu de [BK]
d) ADFH est un parallélogramme

IV) On a :
$A = \sqrt{13+\sqrt{13+\sqrt{13+\sqrt{13+\sqrt{13+\sqrt{13+\ldots}}}}}}$ $B = \sqrt{13-\sqrt{13-\sqrt{13-\sqrt{13-\sqrt{13-\sqrt{13-\ldots}}}}}}$
Déterminer AB en fonction de A et B

Bonne chance !

BAREME APPROXIMATIF : I) 7pts II) 2pts III) 9pts IV) 2pts

2^{BF} Compo de maths 2 heures calculatrice autorisée 22 X 98

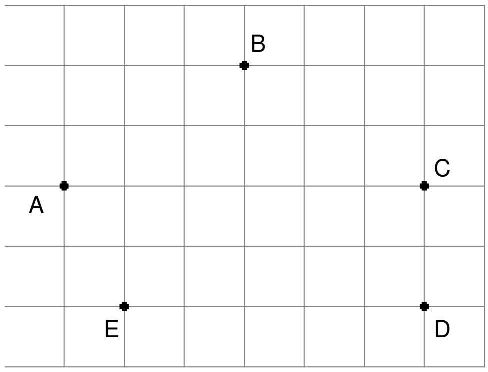
ATTENTION :
- Reproduisez les figures des I) et II) sur votre copie en utilisant les carreaux de votre feuille.
- Bonne chance.

I) Placer les points F, G et H définis par :

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{DG} = -\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AE}$

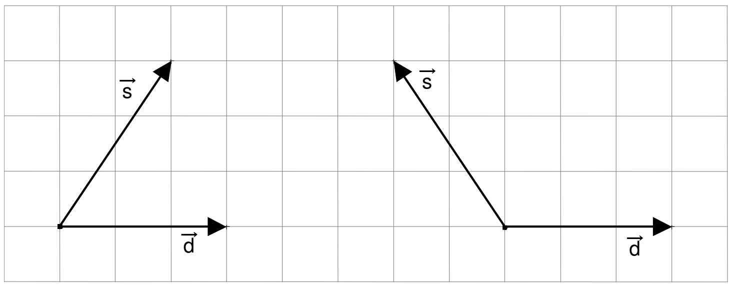


II) Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont on connaît

la somme : $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$

et la différence : $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$.

Déterminer $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans les deux cas ci-contre :
(Préciser votre méthode)



III) Soit ABC un triangle, I le milieu de [AB] et J le milieu de [BC]

1) Démontrer que pour tous les points M du plan; on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MJ}$

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \| = \| \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \|$

3) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \| = \| \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \|$

IV) Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système ci-contre et représenter sur une droite graduée l'ensemble S des solutions.

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{x+3} \leq \dfrac{x-1}{x-3} \\ 4x^2 - 49 \geq 0 \end{cases}$$

V) 1) Factoriser $A(x) = x^2 + 2\,x - 8$ puis faire un tableau de signe ($x \in \mathbb{R}$)

2) Pour quelles valeurs de x le réel $B(x) = \dfrac{x+1}{A(x)}$ est-il défini ? Même question pour $C(x) = \sqrt{A(x)}$

VI)1) Vérifier que, quels que soient les réel a et b; $a^2 + a\,b + b^2 = \dfrac{3}{4}(a+b)^2 + \dfrac{1}{4}(a-b)^2$

2) a et b étant deux réels strictement positifs, on a : $A = \dfrac{1}{a+b}$ et $B = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

Calculer A – B puis comparer A et B.

VII) Il me faut 20 minutes pour remplir ma baignoire quand je mets le bouchon et que le robinet est ouvert au maximum. Il faut 10 minutes pour la vider quand le robinet est fermé et que j'ai enlevé le bouchon. Combien me faudra-t-il de temps pour la vider si j'enlève le bouchon mais que j'oublie d'éteindre le robinet ?

BAREME APPROXIMATIF : I) 1;5 pts II) 2 pts III) 3;5 pts IV) 4;5 pts V) 3 pts VI) 3;5 pts VII) 2 pts

2^{BCFGI} DS de maths 2 heures calculatrice autorisée 23 X 97

I) Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs de directions perpendiculaires,

1) Simplifier l'écriture des vecteurs :

$$\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{i} - 2(\vec{i} - \vec{j})$$
$$\vec{v} = 2(\vec{i} - 3\vec{j}) + 3\vec{i} - 5(\vec{i} - \vec{j})$$
$$\vec{w} = -\vec{i} + 5\vec{j} + 2(\vec{i} - 2\vec{j})$$

2) Sachant que $\|\vec{i}\| = 2$ et $\|\vec{j}\| = 3$, déterminer les normes des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$

II) Soients $A(x) = (x+3)(2x^2-8) - (x^2+4x+4)(x-2)$ et $B(x) = (2x^2+3x-2)^2 - (3x^2+7x+2)^2$

1) Factoriser : $A(x)$ et $B(x)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $a)\ \dfrac{A(x)}{B(x)} = 0$ $b)\ \dfrac{1-3x}{A(x)} \geq 0$ $c)\ \dfrac{2x+4}{B(x)} > 0$

3) Résoudre le système : $\begin{cases} \dfrac{1-3x}{(x+2)(x-2)(x+4)} \geq 0 \\ \\ \dfrac{2x+4}{-5x(x+2)^3} > 0 \end{cases}$

III) Soit un triangle équilatéral ABC de côté 4cm.

1) Construire au compas les points D et E définis par $\begin{cases} 2\,\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB} + 2\,\overrightarrow{CA} \\ 4\,\overrightarrow{EA} - 2\,\overrightarrow{CE} = -3\,(2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{EB} \end{cases}$

2) Démontrer que $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

IV) Soit ABCD un rectangle tel que AB mesure 5cm et BC mesure 3cm.

1) Placer les points I, J, K, L définis par : $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BJ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CK} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DL} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DA}$

2) Exprimer $\overrightarrow{IB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ puis montrer que $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

3) Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ? (Démontrer)

4) Démontrer que O, le centre du rectangle ABCD, est le milieu du segment [IK]

BAREME APPROXIMATIF : I) 3,5pts II) 7,5pts III) 4pts IV) 5pts Bonne chance !