Classe : 2^{nde} 9 Le 22/04/2003

MATHEMATIQUES
DEVOIR N°6

Durée : 2 heures

Exercice 1 : (6 *points*)

Résoudre l'inéquation : $\dfrac{(-2x+4)(x^2+1)}{(x+4)(5x-3)} \geq 0$.

Exercice 2 : (13,5 *points*)

On se place dans un repère $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$.

Soient les points $A(-\frac{7}{2}\,;\,2)$, $B(-2\,;\,5)$, $C(5\,;\,\frac{13}{2})$, $D(3\,;\,\frac{5}{2})$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. En déduire que le quadrilatère ABCD est un trapèze.
3. On définit le point I par l'égalité : $\overrightarrow{IA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{ID}$.

   Montrer que les coordonnées de I sont $(-23\,;\,\frac{1}{2})$.
4. Les points I, B et C sont-ils alignés ?
5. J et K étant les milieux respectifs de [AB] et [CD], déterminer les coordonnées de J et K.

   Démontrer alors que les points I, J et K sont alignés.

Exercice 3 : (12 *points*)

ABC est un triangle.

1. Placer les points D, E et F tels que : $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

   et F est le milieu de [AC].
2. Exprimer, en justifiant, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{FE}$.
3. **a)** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   b) En déduire un réel k tel que $\overrightarrow{AD} = k\,\overrightarrow{AE}$.

   c) Que peut-on alors conclure ?
4. **a)** Placer le point M tel que : $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

   b) Placer le point G symétrique de F par rapport à C.

   Montrer que $\overrightarrow{GA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$ puis que $\overrightarrow{GD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

   c) En déduire la nature du quadrilatère AMDG.

Exercice 4 : (8,5 *points*)

ABC est un triangle

1. Placer les points H et G vérifiant les relations suivantes :

   $\overrightarrow{AH} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BG} = -\frac{7}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$
2. On choisit le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

   a) Donner les coordonnées des points A, B et C dans ce repère.

   b) Déterminer les coordonnées des points H et G dans ce repère.
3. Les points A, G et H sont-ils alignés ?

Correction du devoir N°6 :

Exercice1 :

$-2x + 4 > 0$ pour $x < 2$, c'est à dire $x \in]-\infty ; 2[$

$x + 4 < 0$ pour $x > -4$, c'est à dire $x \in]-4 ; +\infty[$

$5x - 3 < 0$ pour $x > \frac{3}{5}$, c'est à dire $x \in]\frac{3}{5} ; +\infty[$

$x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $x^2 + 1 > 0$ pour tout réel x

x	$-\infty$		-4		$\frac{3}{5}$		2		$+\infty$
signe de $(-2x+4)$		+	|	+	|	+	0	$-$	
signe de (x^2+1)		+	|	+	|	+	|	+	
signe de $(x+4)$		$-$	0	+	|	+	|	+	
signe de $(5x-3)$		$-$	|	$-$	0	+	|	+	
signe de $\frac{(-2x+4)(x^2+1)}{(x+4)(5x-3)}$		+	||	$-$	||	+	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty ; -4[\cup]\frac{3}{5} ; 2]$.

Exercice 2:

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, $A(-\frac{7}{2} ; 2)$, $B(-2 ;5)$, $C(5 ;\frac{13}{2})$ et $D(3 ; \frac{5}{2})$.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 - \left(-\frac{7}{2}\right) \\ 5 - 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3 - 5 \\ \frac{5}{2} - \frac{13}{2} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

2. $xy' - x'y = \frac{3}{2} \times (-4) - (-2) \times 3 = -6 + 6 = 0$.

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
En conclusion, ABCD est un trapèze.

3. $I(x_I ; y_I)$ $\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} - x_I \\ 2 - y_I \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix} 3 - x_I \\ \frac{5}{2} - y_I \end{pmatrix}$. L'égalité $\overrightarrow{IA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{ID}$ nous donne :

$-\frac{7}{2} - x_I = \frac{3}{4}(3 - x_I)$ c'est à dire $-\frac{7}{2} - x_I = \frac{9}{4} - \frac{3}{4}x_I$

$2 - y_I = \frac{3}{4}\left(\frac{5}{2} - y_I\right)$ c'est à dire $2 - y_I = \frac{15}{8} - \frac{3}{4}y_I$

La première égalité donne : $\frac{1}{4}x_I = -\frac{7}{2} - \frac{9}{4} = -\frac{23}{4}$ donc $x_I = -23$

La deuxième égalité donne : $\frac{1}{4}y_I = 2 - \frac{15}{8} = \frac{1}{8}$ donc $y_I = -\frac{1}{2}$ et $I(-23 ; -\frac{1}{2})$

4. $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix} -2 - (-23) \\ 5 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix} 21 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix} 5 - (-23) \\ \frac{13}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix} 28 \\ 6 \end{pmatrix}$

$xy' - x'y = 21 \times 6 - 28 \times \frac{9}{2} = 126 - 126 = 0$

Donc $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont colinéaires et les points I, B et C sont alignés.

5. a) J est le milieu de [AB], d'où $x_J = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-\frac{7}{2} - 2}{2} = -\frac{11}{4}$ et $J(-\frac{11}{4} ; \frac{7}{2})$.

$y_J = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 + 5}{2} = \frac{7}{2}$

$$x_K = \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$$

K est le milieu de [CD], d’où $\qquad$ donc $K(4\,;\frac{9}{2})$.

$$y_K = \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{\frac{13}{2}+\frac{5}{2}}{2} = \frac{9}{2}$$

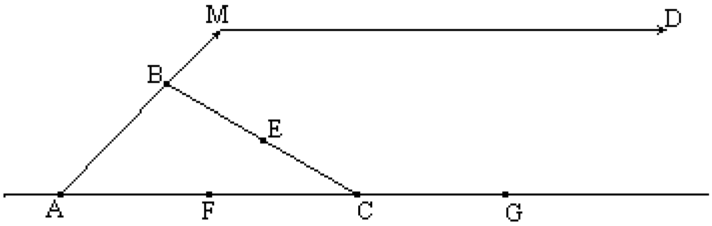
b) $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -\frac{11}{4} - (-23) \\ \frac{7}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} \frac{81}{4} \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} 4 - (-23) \\ \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} 27 \\ 4 \end{pmatrix}$

or $xy' - x'y = \frac{81}{4} \times 4 - 27 \times 3 = 81 \times 81 = 0$

Donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires et les points I ,J et K sont alignés.

Exercice 3 :

1.



2. Dans le triangle ABC, E est le milieu de [BC]

F est le milieu de [AC]

Donc d’après le théorème des milieux, $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{FE}$.

3. a) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ d’après la relation de Chasles

$= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

b) $3\overrightarrow{AE} = 3 \times \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 3 \times \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ d’où $\overrightarrow{AD} = 3\,\overrightarrow{AE}$.

c) Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont alors colinéaires et les points A, D et E sont alignés.

4. a) $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$ nous donne $\overrightarrow{MA} - 3\,\overrightarrow{MA} - 3\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$

on a alors $-2\,\overrightarrow{MA} = 3\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ (ceci nous permet alors de placer le point M).

b) G est le symétrique de F par rapport à C, d’où C est le milieu de [FG] et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{FC}$.

$\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ d’où $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$.

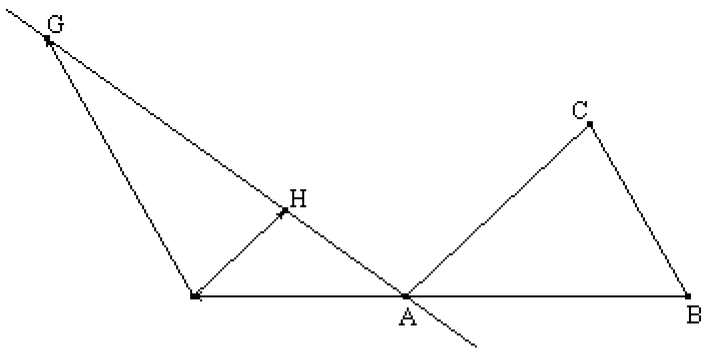
$\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

c) On a alors $\overrightarrow{GD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

d’où $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{AM}$ et le quadrilatère AMDG est un parallélogramme.

Exercice 4 :

1.



2. Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

a) $A(0 ; 0)$ $B(1 ; 0)$ et $C(0 ; 1)$

b) • $\overrightarrow{AH} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $H(-\frac{3}{4} ; \frac{1}{2})$ car A est l'origine du repère

• $\overrightarrow{BG} = -\frac{7}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} -\frac{7}{4}-\frac{3}{2} \\ 0+\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} -\frac{13}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} x_G - 1 \\ y_G \end{pmatrix}$

d'où $x_G - 1 = -\frac{13}{4}$ ce qui donne $x_G = -\frac{9}{4}$ et $y_G = \frac{3}{2}$. Donc $G(-\frac{9}{4} ; \frac{3}{2})$.

3. A étant l'origine du repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$xy' - x'y = -\frac{9}{4}\times\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{4}\right)\times\frac{3}{2} = -\frac{9}{8} + \frac{9}{8} = 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et les points A, G et H sont alignés.