Classe : 2^{nde} 12 Le 07/03/2003

DEVOIR N°5

Exercice 1 : (5,5 *points*)

f est une fonction affine telle que $f(2) = 1$ et $f(-3) = 4$.

1. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

2. Sans effectuer la représentation graphique de la fonction f, donner, en justifiant, le sens de variation de f.

3. Calculer $f(-\frac{1}{2})$.

4. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq -2$.

Exercice 2 : (9,5 *points*)

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $x^2 - 4x + 4 < (x - 2)(3x + 5)$

b) $\dfrac{(x^2 + 1)(3x - 1)}{5x + 3} \geq 0$.

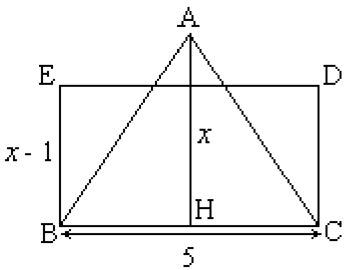
Exercice 3 : (5 *points*)

L'unité de longueur est le cm et l'unité d'aire est le cm².

ABC est un triangle isocèle en A tel que BC = 5.

H est le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC. On pose AH = x.

BCDE est un rectangle tel que BC = 5 et EB = $x - 1$.



1. Exprimer en fonction de x l'aire $f(x)$ du triangle ABC et l'aire $g(x)$ du rectangle BCDE.

2. Tracer dans un repère les courbes représentatives des fonction f et g. (*les calculs devront figurer sur la copie.*)

3. Trouver la hauteur AH pour laquelle le triangle ABC et le rectangle BCDE ont la même aire.

On traitera cette question graphiquement et algébriquement.

Correction du devoir 5

Exercice1 :

1. f est une fonction affine, elle est alors de la forme $f(x) = ax + b$

où $a = \dfrac{f(2) - f(-3)}{2 - (-3)} = \dfrac{1 - 4}{2 + 3} = -\dfrac{3}{5}$ d'où $f(x) = -\dfrac{3}{5}x + b$

de plus $f(2) = 1$ et $f(2) = -\dfrac{3}{5} \times 2 + b = -\dfrac{6}{5} + b$

on obtient alors : $1 = -\dfrac{6}{5} + b$ ce qui donne $b = \dfrac{11}{5}$.

Conclusion : $f(x) = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{11}{5}$.

2. Le coefficient directeur de la droite représentant f est négatif. Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. $f(-\dfrac{1}{2}) = -\dfrac{3}{5} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{11}{5} = \dfrac{3}{10} + \dfrac{22}{10} = \dfrac{25}{10} = \dfrac{5}{2}$.

4. $f(x) \geq -2$ signifie : $-\dfrac{3}{5}x + \dfrac{11}{5} \geq -2$

$-\dfrac{3}{5}x \geq -\dfrac{21}{5}$ donc $x \leq -\dfrac{21}{5} \times \left(-\dfrac{5}{3}\right)$ et $x \leq 7$

L'ensemble des solutions est donc $]-\infty ; 7]$.

Exercice 2 :

a) $x^2 - 4x + 4 < (x - 2)(3x + 5)$

$(x - 2)^2 - (x - 2)(3x + 5) < 0$ "on met tout d'un même côté"

$(x - 2)[(x - 2) - (3x + 5)] < 0$ on factorise

$(x - 2)(-2x - 7) < 0$

$x - 2 > 0$ $-2x - 7 > 0$

$x > 2$ c'est à dire $x \in]2 ; +\infty[$ $x < -\dfrac{7}{2}$ c'est à dire $x \in]-\infty ; -\dfrac{7}{2}[$

x	$-\infty$		$-\dfrac{7}{2}$		2		$+\infty$
signe de $(x - 2)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
signe de $(-2x - 7)$		$+$	0	$-$	|	$-$	
signe de $(x - 2)(-2x - 7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty ; -\dfrac{7}{2}[\cup]2 ; +\infty[$.

b) $\dfrac{(x^2 + 1)(3x - 1)}{5x + 3} \geq 0$

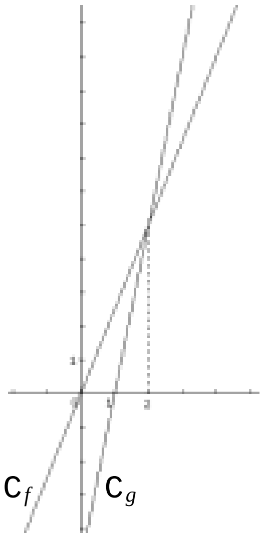
$x^2 \geq 0$ pour tout réel x, donc $x^2 + 1 > 0$ pour tout réel x.

$3x - 1 > 0$ $\qquad\qquad$ $5x + 3 > 0$

$x > \dfrac{1}{3}$ c'est à dire $x \in]\dfrac{1}{3} ; +\infty[$ $\qquad$ $x > -\dfrac{3}{5}$ c'est à dire $x \in]-\dfrac{3}{5} ; +\infty[$.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{5}$		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
signe de $(x^2 + 1)$	+		+		+
signe de $(3x - 1)$	–		–	0	–
signe de $(5x + 3)$	–	0	+		+
signe de $\dfrac{(x^2 + 1)(3x - 1)}{5x + 3}$	+	$\|$	–	0	–

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $]-\infty ; -\dfrac{3}{5}[\cup [\dfrac{1}{3} ; +\infty[$.



Exercice 3 :

1. $f(x) = \dfrac{BC \times AH}{2} = \dfrac{5 \times x}{2} = \dfrac{5x}{2}$

$g(x) = BC \times EB = 5 \times (x - 1) = 5x - 5$

2. $f(0) = \dfrac{5 \times 0}{2} = 0$ $\quad$ et $\quad$ $f(4) = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$

$g(0) = 5 \times 0 - 5 = -5$ $\quad$ et $\quad$ $g(2) = 5 \times 2 - 5 = 5$

3. L'abscisse du point d'intersection des deux droites est 2.
La hauteur AH doit donc être de 2 cm pour que les deux aires soient égales.

$f(x) = g(x)$ signifie $\dfrac{5x}{2} = 5x - 5$

$$-\frac{5}{2}x = -5$$

$$x = -5 \times \left(-\frac{2}{5}\right) = 2$$

La hauteur AH doit donc être de 2 cm pour que les deux aires soient égales.