$\boxed{1}$

On donne $P(x) = (x - 3)(3x + 4) - 2(x^2 - 9) + x - 3$.

1° Exemples d'écritures de P(x)

a) Factoriser P(x).

b) Développer P(x).

c) Démontrer que pour tout réel x : $P(x) = (x - 2)^2 - 1$

2° Résoudre les équations suivantes

a) $P(x) = 0$

b) $P(x) = 3$

c) $P(x) = -1$

$\boxed{2}$

Résoudre les équations suivantes :

$\dfrac{x-1}{4} - \dfrac{2x+1}{12} = \dfrac{x}{6}$	$(x + 1)(2x + 1) = 2x + 1$	$(2x - 1)^2 = (2 - 3x)^2$
$\dfrac{x}{x+2} - 2 = \dfrac{-x+4}{x}$	$\dfrac{2x-1}{x+1} = \dfrac{x+2}{x-2}$	

$\boxed{3}$

C est un point d'un cercle de diamètre [AB] et de centre O.

D est le symétrique de B par rapport à C.

La droite (AD) recoupe le cercle en E.

a) Compléter la figure ci-jointe au fur et à mesure des questions posées...

b) Montrer que (AC) est la médiatrice de [BD]. En déduire que (AC) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$.

c) Montrer que (BE) est perpendiculaire à (OC). En déduire que (OC) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BOE}$.

d) Soit H le point d'intersection de (AC) et (EB). Montrer que (DH) est perpendiculaire à (AB).

$\boxed{4}$

ABC est un triangle tel que : AH = 4, BH = 3, CH = 2

où H est le projeté orthogonal de A sur [BC]

Soit M un point de [AB]. La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N

P est le projeté orthogonal de M sur [BC] et Q est le projeté orthogonal de N sur [BC]

On cherche à placer M pour que le **rectangle** MNQP soit un carré.

1° Choix de l'inconnue.

On pose x = AM.

a) Calculer la longueur AB.

b) Quelles contraintes doit vérifier x.

2° Mise en équation .

a) Exprimer MN en fonction de x.

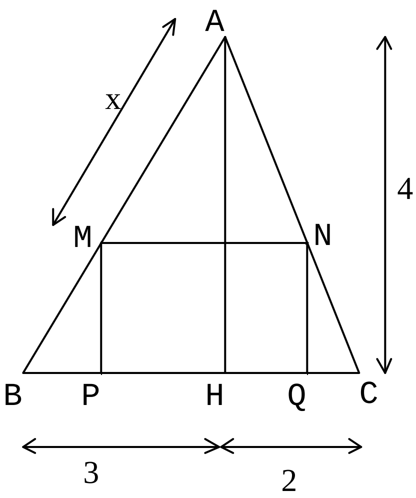
b) Exprimer MP en fonction de x.

3° résolution de l'équation.

Résoudre l'équation : $\dfrac{20 - 4x}{5} = x$

4° Retour au problème

Conclure.



Correction $\boxed{1}$ 1° a) $P(x) = (x-3)(3x+4) - 2(x^2-9) + x - 3 = \mathbf{(x-3)}(3x+4) - 2\mathbf{(x-3)}(x+3) + \mathbf{x-3}$

$= (x-3)\{(3x+4) - 2(x+3) + 1] = (x-3)(3x+4-2x-6+1) = \boxed{(x-3)(x-1)}$

b) $P(x) = (x-3)(3x+4) - 2(x^2-9) + x - 3 = 3x^2 + 4x - 9x - 12 - 2x^2 + 18 + x - 3 = \boxed{x^2 - 4x + 3}$

c) $(x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 1 = x^2 - 4x + 3 = P(x)$

$\boxed{2}$ $\dfrac{x-1}{4} - \dfrac{2x+1}{12} = \dfrac{x}{6} \Leftrightarrow \dfrac{3(x-1)}{12} - \dfrac{2x+1}{12} - \dfrac{2x}{12} = 0 \Leftrightarrow 3(x-1) - (2x+1) - 2x = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 3 - 2x - 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow -x - 4 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = -4}$ $\quad \boxed{S = \{-4\}}$

$(x+1)(2x+1) = 2x+1 \Leftrightarrow (x+1)(2x+1) - (2x+1) = 0 \Leftrightarrow (2x+1)[(x+1)-1] = 0 \Leftrightarrow (2x+1)x = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{x = -\dfrac{1}{2} \text{ ou } x = 0}$ $\quad \boxed{S = \{1/2, 0\}}$

$(2x-1)^2 = (2-3x)^2 \Leftrightarrow (2x-1)^2 - (2-3x)^2 = 0 \Leftrightarrow [(2x-1) - (2-3x)][(2x-1) + (2-3x)] = 0$

$\Leftrightarrow (2x - 1 - 2 + 3x)(2x - 1 + 2 - 3x) = 0 \Leftrightarrow (5x-3)(-x+1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \dfrac{3}{5} \text{ ou } x = 1}$ $\quad \boxed{S = \{5/3, 1\}}$

$\dfrac{x}{x+2} - 2 = \dfrac{-x+4}{x}$ Valeurs interdites : $x \neq -2$ et $x \neq 0$.

$\dfrac{x}{x+2} - 2 = \dfrac{-x+4}{x} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+2} - 2 - \dfrac{-x+4}{x} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x(x+2)} - \dfrac{2x(x+2)}{x(x+2)} - \dfrac{(x+2)(-x+4)}{x(x+2)} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x(x+2) - (x+2)(-x+4) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x^2 - 4x - (-x^2 + 4x - 2x + 8) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x^2 + x^2 - 4x - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow -6x - 8 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = -\dfrac{4}{3}}$ $\quad -\dfrac{4}{3} \neq -2$ et $-\dfrac{4}{3} \neq 0$ donc $S = \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$

$\dfrac{2x-1}{x+1} = \dfrac{x+2}{x-2}$ Valeurs interdites : $x \neq -1$ et $x \neq 2$.

$\dfrac{2x-1}{x+1} = \dfrac{x+2}{x-2} \Leftrightarrow (2x-1)(x-2) = (x+2)(x+1) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - x + 2 = x^2 + x + 2x + 2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x - x + 2 - x^2 - x - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x-8) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0 \text{ ou } x = 8}$.

0 et 8 sont différents de – 1 et de 2 donc $\boxed{S = \{0, 8\}}$

$\boxed{3}$ b) C est un point d'un cercle de diamètre [AB] donc ABC est rectangle en C donc (AC) ⊥ (BC).

D est le symétrique de B par rapport à C donc C est le milieu de [BC].

La droite (AC) passe par le milieu de [BD] et est perpendiculaire à (BD) c'est donc la médiatrice de [BD].

Le triangle ACD est donc isocèle e, A et la médiatrice du côté [BD] est aussi la bissectrice de $\widehat{BAD}$

c) E est sur le cercle de diamètre [AB] donc (BE) ⊥ (AE).

Dans le triangle ABD la droite (OC) passe par les milieux des côté [AB] et [BD] elle est donc perpendiculaire au côté (AD)

$\left.\begin{array}{l}(BE) \perp (AD) \\ (AD) // (OC)\end{array}\right\}$ donc (BE) ⊥ (OC)

Le triangle OEB est isocèle en O donc la hauteur (OC) est aussi la bissectrice de $\widehat{BOE}$

d) dans le triangle ABD, (AC) et (EB) sont deux hauteurs donc H est l'orthocentre du triangle ABD donc (DH) est la troisième hauteur donc (DH) ⊥ (AB).

$\boxed{4}$ 1 a) Le triangle ABH est rectangle en H. On peut appliquer le théorème de Pythagore.

$AB^2 = AH^2 + BH^2$ donc $AB^2 = 16 + 9$ donc AB = 5

b) $x \in [AB]$ donc on doit avoir $0 \leq x \leq 5$. Remarque : Pour x = 0, M = A et pour x = 5, M = B

2° a) Dans le triangle ABC : $\left.\begin{array}{c}\text{A, B et M sont alignés} \\ \text{A, C et N sont alignés} \\ (MN) // (BC)\end{array}\right\}$ donc d'après théorème de Thales : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

On a donc $\dfrac{x}{5} = \dfrac{MN}{3+2}$ c'est-à-dire $\boxed{MN = x}$

b) Dans le triangle ABH : $\left.\begin{array}{c}\text{A, B et M sont alignés} \\ \text{A, P et H sont alignés} \\ (PH) // (AH)\end{array}\right\}$ donc d'après théorème de Thales : $\dfrac{BM}{BA} = \dfrac{BP}{BH} = \dfrac{MP}{AH}$

On a donc $\dfrac{MP}{4} = \dfrac{5-x}{5}$ c'est-à-dire $\boxed{MP = \dfrac{20-4x}{5}}$

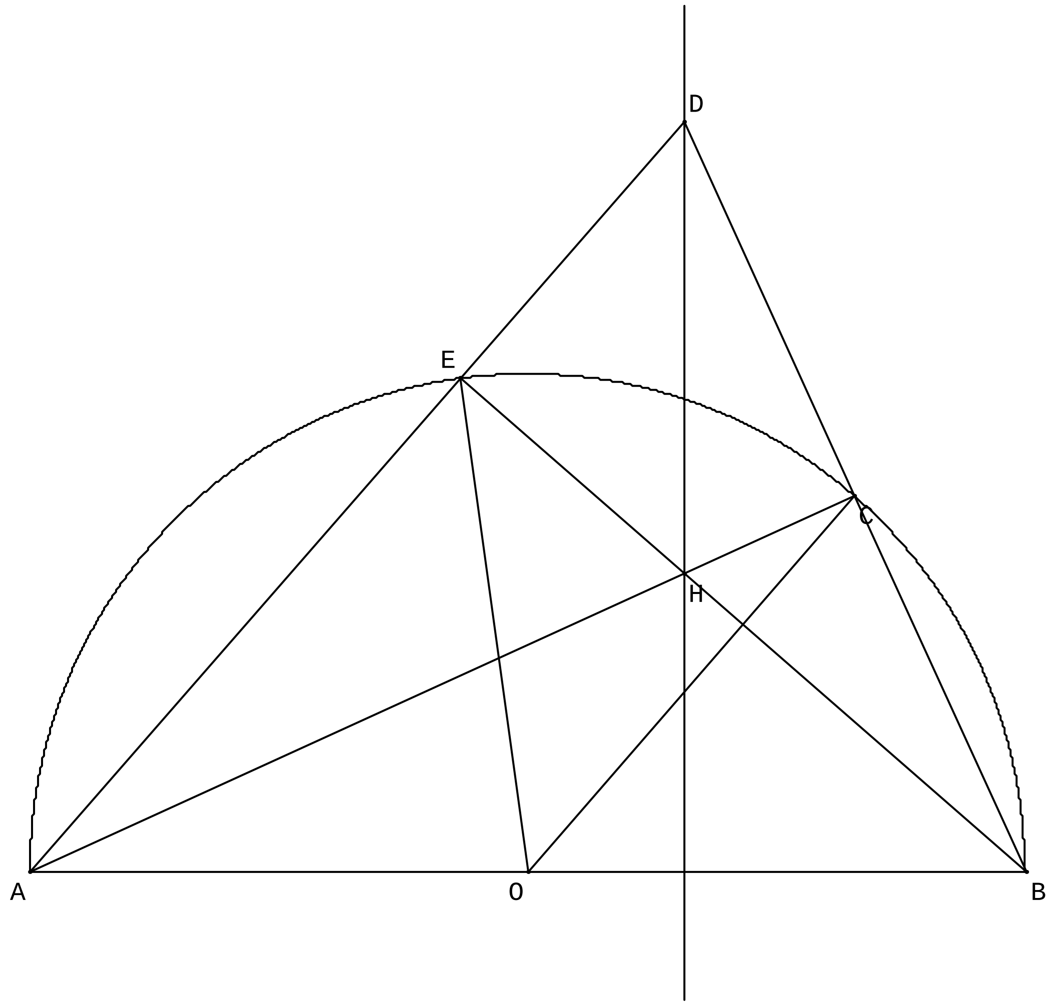
3° $\dfrac{20-4x}{5} = x \Leftrightarrow 20 - 4x = 5x \Leftrightarrow \boxed{x = \dfrac{20}{9}}$

4° $0 \leq \dfrac{20}{9} \leq 5$.

Quand M est le point de [AB] tel que $AM = \dfrac{20}{9}$ alors MNQP est un rectangle tel que MN = MP

C'est donc un carré.

.


D
E
C
H
A
0
B

Nom. ______________________________